ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THÚY

SỐ CATALAN-LARCOMBE-FRENCH VÀ SỐ CATALAN SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THÚY

SỐ CATALAN-LARCOMBE-FRENCH VÀ SỐ CATALAN SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**

Mã số: **8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước hết, tác giả muốn tỏ lòng biết ơn đến người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long), người đã đặt bài toán của đề tài, tận tình hướng dẫn để luận văn này được hoàn thành tốt đẹp.

Nhân dịp này, tác giả xin được cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán khóa 10 (2016-2018).

Xin trân trọng cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Phạm Ngũ Lão, Thủy Nguyên, Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả học tập và nghiên cứu.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Danh sách kí hiệu

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	vành số nguyên
$\mathbb{Q}$	trường số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{C}$	trường số phức
$\lceil x \rceil$	trần của số x
$\lfloor x \rfloor$	sàn của số x
$a \mid b$	b là bội của a
$a \nmid b$	a không phải là ước của b
$\binom{n}{k}$	số tổ hợp chập k của n
$a \equiv b \pmod{p}$	a đồng dư với b theo modulo p
$\mathbb{Z}_p$	vành các số nguyên đồng dư modulo p
$\gcd(a, b)$	ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b

Mở đầu

Trong Tổ hợp, số Catalan là dãy các số tự nhiên xuất hiện nhiều trong các bài toán đếm, thường bao gồm những đối tượng đệ quy. Số Catalan được đặt tên theo nhà toán học Eugène C. Catalan (1814-1894).

Luận văn này đặt nhiệm vụ nghiên cứu sơ bộ về các số Catalan-Larcombe-French và các số Catalan suy rộng. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương như sau:

- *Chương 1. Số Catalan-Larcombe-French.*
- *Chương 2. Hàm nhân tính và số Catalan suy rộng.*

Mặc dù tác giả đã rất cố gắng để hoàn thành luận văn nhưng do khối lượng kiến thức rất lớn, đồng thời bị hạn chế ở nhiều khía cạnh, luận văn chắc chắn sẽ còn những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp từ các Thầy Cô, các anh chị đồng nghiệp để luận văn này ngày càng hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 6 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Phương Thúy

Chương 1

Số Catalan-Larcombe-French

Các số Catalan-Larcombe-French P_n thường gặp trong lý thuyết tích phân elliptic và những vấn đề liên quan đến các trung bình cộng và trung bình nhân. Trong chương này chúng tôi sẽ khảo sát các tính chất của dãy số liên quan $S_n = P_n/2^n$, và như vậy S_n là một dãy kiểu Apéry. Chúng tôi cũng sẽ chứng minh một đồng dư và một bất đẳng thức đối với P_n.

Nội dung Chương 1 được viết dựa vào công trình Ji X.-J., Sun Z.-H. [5].

1.1 Giới thiệu

Giả sử (P_n) là dãy được cho bởi

$$\begin{aligned} &P_0 = 1, \quad P_1 = 8, \\ &(n+1)^2 P_{n+1} = 8(3n^2+3n+1)P_n - 128n^2 P_{n-1} \ (n \geqslant 1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Các số P_n được gọi là các *số Catalan-Larcombe-French*, vì Catalan là người định nghĩa P_n lần đầu tiên trong Catalan [12], còn Larcombe & French [7] đã chứng minh rằng

$$P_n = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-4)^k \binom{2n-2k}{n-k}^2 \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}^2 \binom{2n-2k}{n-k}^2}{\binom{n}{k}},$$

trong đó $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Các số P_n là liên quan đến trung bình cộng, trung bình nhân. Xem [7] và A053175 trong "Bách khoa toàn thư trực tuyến các dãy số nguyên" (xem [8]).

Giả sử (S_n) được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} &S_0 = 1,\ S_1 = 4, \\ &(n+1)^2 S_{n+1} = 4(3n^2+3n+1)S_n - 32n^2 S_{n-1}\ (n \geqslant 1). \end{aligned} \tag{1.2}$$

So sánh (1.2) với (1.1), ta thấy rằng

$$S_n = \frac{P_n}{2^n}.$$

Một số giá trị đầu tiên của S_n được cho dưới đây:

$$\begin{array}{lll} S_0 = 1, & S_1 = 4, & S_2 = 20, \\ S_3 = 112, & S_4 = 676, & S_5 = 4304, \\ S_6 = 28496, & S_7 = 194240, & S_8 = 1353508, \\ S_9 = 9593104, & S_{10} = 68906320, & S_{11} = 500281280, \\ S_{12} = 3664176400, & S_{13} = 27033720640. & \end{array}$$

(2005) đã chứng minh rằng nếu $n = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0$ với $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, thì

$$P_n \equiv P_{a_r} \cdots P_{a_1} P_{a_0} \pmod p.$$

Jarvis & Verrill (2010) đã chỉ ra rằng

$$P_n \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 128^n P_{p-1-n} \pmod p \quad \text{với} \quad n = 0, 1, \ldots, p-1$$

và

$$P_{mp^r} \equiv P_{mp^{r-1}} \pmod{p^r} \quad \text{với} \quad m, r \in \mathbb{Z}^+,$$

trong đó $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương.

Với một số nguyên tố p, ký hiệu $\mathbb{Z}_p$ là tập các số hữu tỷ mà mẫu số không chia hết cho p. Giả sử p là một số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{Z}_p$ và $n \not\equiv 0, -16 \pmod p$. Công trình Sun Z.H. [10] đã chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2k}{k} \frac{S_k}{(n+16)^k} \equiv \left(\frac{n(n+16)}{p}\right) \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\binom{2k}{k}^2 \binom{4k}{2k}}{n^{2k}} \pmod p,$$

trong đó $(\frac{a}{p})$ là *ký hiệu Legendre.*

Năm 1894, Franel [4] đã đưa ra các số Franel (f_n) sau đây

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Một số số Franel đầu tiên được cho dưới đây:

$$f_0 = 1,\ f_1 = 2,\ f_3 = 10,\ f_4 = 56,\ f_5 = 346,\ f_6 = 2252,\ f_7 = 15184.$$

Franel [4] đã chú ý rằng dãy (f_n) thỏa mãn quan hệ đồng dư

$$(n+1)^2 f_{n+1} = (7n^2 + 7n + 2) f_n + 8n^2 f_{n-1}\ (n \geqslant 1).$$

Giả sử $r \in \mathbb{Z}^+$ và p là một số nguyên tố với $p \equiv 5, 7 \pmod 8$. Bài báo Sun Z.H. [10] phỏng đoán rằng

$$S_{\frac{p^r-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p^r} \quad \text{và} \quad f_{\frac{p^r-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p^r}. \tag{1.3}$$

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ trình bày chứng minh (1.3) trong trường hợp $r = 2$ (xem Sun Z.H. [10]). Chúng tôi cũng trình bày chứng minh giả thuyết sau đây trong bài báo Sun Z.H. [10]

$$\left(1 + \frac{1}{m(m-1)}\right) S_m^2 > S_{m+1} S_{m-1} \quad \text{với} \quad m = 2, 3, \ldots.$$

1.2 Các bổ đề cơ sở

Bổ đề 1.2.1. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ. Giả sử rằng $a = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0$ và $b = b_r p^r + \cdots + b_1 p + b_0$, trong đó $a_r, \ldots, a_0, b_r, \ldots, b_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Khi đó*

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_r}{b_r} \cdots \binom{a_0}{b_0} \pmod p.$$

Định lí Lucas thường được viết dạng sau đây:

Bổ đề 1.2.2. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ và $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Giả sử $a_0, b_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Khi đó*

$$\binom{ap + a_0}{bp + b_0} \equiv \binom{a}{b}\binom{a_0}{b_0} \pmod{p}.$$

Tiếp theo, ta có

Bổ đề 1.2.3. *Với bất kỳ số nguyên dương n ta có*

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

Bổ đề 1.2.4. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ. Giả sử $n = n_1 p + n_0$ và $k = k_1 p + k_0$ với $k_1, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ và $k_0, n_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Khi đó*

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1}\left((1+n_1)\binom{n_0}{k_0} - (n_1+k_1)\binom{n_0 - p}{k_0} - k_1\binom{n_0 - p}{k_0 + p}\right) \pmod{p^2}.$$

Bổ đề 1.2.5. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó*

$$\sum_{t=0}^{(p-1)/2} (-1)^t \left(\binom{\frac{p-1}{2} + t}{t} - \binom{p + \frac{p-1}{2} + t}{p + t}\right)\binom{-\frac{1}{2}}{t}^2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Chứng minh. Với $0 \leqslant t \leqslant (p-1)/2$, từ Bổ đề 1.2.2 ta có

$$\begin{aligned}\binom{\frac{p-1}{2} - p}{p + t} &= (-1)^{t+1}\binom{p + \frac{p+1}{2} + t - 1}{p + t} \equiv (-1)^{t+1}\binom{\frac{p+1}{2} + t - 1}{t} \\ &= -\binom{\frac{p-1}{2} - p}{t} \pmod{p}\end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned}\binom{\frac{p-1}{2} - p}{t} + \binom{\frac{p-1}{2} - p}{p + t} &= (-1)^t\left(\binom{\frac{p-1}{2} + t}{t} - \binom{p + \frac{p-1}{2} + t}{p + t}\right) \\ &\equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Trước hết ta giả sử rằng $p \equiv 1 \pmod{4}$. Áp dụng Bổ đề 1.2.4 ta nhận được

$$\binom{\frac{3(p-1)}{4}}{\frac{p-1}{4}} - \binom{p + \frac{3(p-1)}{4}}{p + \frac{p-1}{4}} \equiv \binom{\frac{3(p-1)}{4}}{\frac{p-1}{2}} - \left(2\binom{\frac{3(p-1)}{4}}{\frac{p-1}{2}} - \binom{\frac{3(p-1)}{4} - p}{\frac{p-1}{2}}\right)$$